ЛЕКЦИЯ № 19

Гамильтонова механика. Уравнения Гамильтона.

Гамильтон был, по-видимому, наделен каким-то удивительным даром проникать в самую суть.

П.А.Дирак

В лекции №2 мы познакомились с лагранжевым подходом к механике и выводом уравнений Лагранжа для обобщенных координат, исходя из *принципа Д'Аламбера*, как это и было сделано Лагранжем. Но в лекции №3 было показано, как эти уравнения могут быть выведены из другого принципа – *принципа наименьшего действия*. Этот принцип впервые в *упрощенной форме* был сформулирован Пьером Луи де Мопертюи (1698-1759), который в 1744 году выдвинул его в виде: «Количество действия, необходимое для того, чтобы произвести некоторое изменение в природе, является наименее возможным». «Действие» он определил, как произведение $m \cdot v \cdot l$ – масса$\times$скорость$\times$пройденный путь. Учитывая, что скорость меняется со временем, необходимо это выражение заменить на $\int mvdl = \int mv\,vdt = \int 2Tdt$, где T – кинетическая энергия.

Вильям Роуэн Гамильтон (1806-1865) показал, что уравнения Лагранжа (1736-1813), которые были выведены из «локального» (дифференциального) принципа, могут быть выведены из «интегрального» принципа, как минимальность интеграла от несколько другой, чем у Мопертюи функции, а именно – функции Лагранжа. Интегральный принцип Гамильтона становится *исходным принципом механики*.

Гамильтоном был сформулирован другой подход к механике, который позже оказался очень продуктивным, особенно при формулировке принципов квантовой механики и связи ее с классической. В предыдущих лекциях указывалось, что уравнения Лагранжа (дифференциальные уравнения второго порядка по производным от обобщенных координат) можно представить, как систему уравнений первого порядка. Например, уравнение осциллятора $m\ddot{x} + kx = 0$ можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка для координат и скорости:

$$\dot{x} = v, \qquad \dot{v} = -kx/m. \tag{19.1}$$

Такой подход приводит к возможности анализа динамики системы на фазовой плоскости и качественным методам механики. Эта идея понижения порядка уравнений за счет удвоения числа неизвестных лежит в основе гамильтоновой механики. Однако, в качестве новых независимых переменных выбираются не обобщенные координаты и скорости (которые в механике Лагранжа представляют собой производные от обобщенных координат), а обобщенные координаты и обобщенные импульсы. Напомним, что в лагранжевой механике в общем случае импульсы представляют собой не обязательно $m\dot{q}$, а

$$p_i = \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i}. \tag{19.2}$$

Переход от набора переменных $(q_i, \dot{q}_i)$ к новому набору переменных (q_i, p_i) осуществляется с помощью *преобразования Лежаднра*, которое производится в Лагранжиане. Вычислим полный дифференциал от функции Лагранжа:

$$dL(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{19.3}$$

Воспользовавшись определением импульсов (19.2) и уравнениями Лагранжа в форме $\dot{p}_i = \partial L / \partial q_i$, перепишем (19.3) в форме

$$dL(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt, \tag{19.4}$$

и представим второе слагаемое в виде

$$\sum_i p_i d\dot{q}_i = \sum_i d(p_i \dot{q}_i) - \sum_i \dot{q}_i dp_i. \tag{19.5}$$

После этого получим

$$d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L\right) = \sum_i (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{19.6}$$

Сравнивая выражения (19.4) и (19.6), мы видим, что в правой части (19.4) стоят дифференциалы $dq_i, d\dot{q}_i, dt$ переменных функции Лагранжа влевой части. В правой части (19.6) стоят дифференциалы dq_i, dp_i, dt, которые являются переменными функции, стоящей влевой части. Таким образом, мы должны перейти к этим переменным и в левой части (19.6). Из определения импульсов (19.2)

$$p_i = \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i} = f(q_i, \dot{q}_i, t), \tag{19.7}$$

рассматриваемых, как систему алгебраических уравнений относительно q_i, $\dot{q}_i$ и p_i, выразим обобщенные скорости через обобщенные координаты, импульсы и время. Из теорем о неявных функциях известно, что при условии $\det|\partial f_i / \partial \dot{q}_k| \neq 0$ система уравнений (19.7) разрешима относительно скоростей:

$$\dot{q}_i = g_i(q, p, t). \tag{19.8}$$

Подставив эти выражения в левую часть (19.6), получим для нее выражение

$$d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t)\right) = d\left(\sum_i p_i g_i(p, q, t) - L(q_i, g_i(p, q, t), t)\right). \tag{19.9}$$

Понимаемая в таком смысле, функция, стоящая под дифференциалом называется ***функцией Гамильтона*** или ***гамильтонианом***:

$$H(p_i, q_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t)\Big|_{\dot{q}=g(p,q,t)}. \tag{19.10}$$

Из сравнения дифференциала этой функции

$$dH(q_i, p_i, t) = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \tag{19.11}$$

с выражением (19.6) следует следующая система дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \tag{19.12}$$

и уравнение

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} . \tag{19.13}$$

Уравнения (19.12) называются ***уравнениями Гамильтона*** или ***каноническими уравнениями***.

В то время как в лагранжевом подходе обобщенная скорость представляла собой производную от обобщенной координаты, в гамильтоновом подходе обобщенные координаты и импульсы представляют собой независимые переменные, связанные только уравнениями Гамильтоны.

При этом импульс теряет свой наглядный вид произведения массы на скорость. Поэтому в общем случае можно говорить о ***гамильтоновой динамике*** и ***гамильтоновой системе***, как такой, в которой существует некая функция $H(q_1,..., q_N; p_1,.., p_N, t)$ двух наборов независимых переменных, для которых определены их временные производные как $\dot{q} = \partial H / \partial p$ и $\dot{p} = -\partial H / \partial q$. Эти два набора переменных называют ***каноническими переменными*** или ***канонически сопряженными величинами***, а сами уравнения – ***каноническими***.

Функция Гамильтона имеет простой смысл. Если вспомнить *определение* энергии в лагранжевой механике, как интеграла движения, имеющего вид $E = \sum \dot{q}_i \partial L / \partial \dot{q}_i - L$, то из (19.10) следует, что гамильтониан представляет собой энергию, выраженную в терминах обобщенных координат и импульсвов.

Для примера рассмотрим использовавшиеся в предыдущих лекциях уравнения для комплексной переменной $i\dot{\psi} = \omega_0 \psi$. Видно, что это уравнение вместе с его комплексным сопряжением

$$\dot{\psi} = -i\omega_0 \psi, \quad i\dot{\overline{\psi}} = \omega_0 \overline{\psi} \tag{19.14}$$

могут быть записанными в гамильтоновой форме для канонически сопряженных величин $q = \psi$ и $p = i\overline{\psi}$ с функцией Гамильтона

$$H = -i\omega_0 pq = \omega_0 \psi \overline{\psi}\,. \tag{19.15}$$

Напомним, что лагранжиан, для которого уравнения (19.14) являются лагранжевыми, выглядит следующим образом:

$$L = i\left(\dot{\psi}\overline{\psi} - \dot{\overline{\psi}}\psi\right) - \omega_0 \psi \overline{\psi}\,. \tag{19.16}$$

Следующее из этого лагранжиана выражение для энергии, естественно, совпадает с (19.16) $E = \omega_0 \psi \overline{\psi}$.